

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA ED INFORMATICA
PROGETTO MAT.ITA

Potenziamento delle competenze logico-matematiche
per gli studenti delle scuole secondarie di II grado
e prevenzione degli Obblighi Formativi aggiuntivi (O.F.A)
al primo anno del percorso universitario.

INTRODUZIONE

L'attuale ordinamento degli studi universitari ha tra i suoi obiettivi primari far sì che gli studenti dei vari atenei compiano gli studi in tempi più vicini possibile alla loro durata legale. Per raggiungere questo obiettivo lo studente, al momento dell'immatricolazione all'università, deve possedere un'adeguata preparazione iniziale e non deve avere carenze significative (debiti formativi) sulle conoscenze di base.

L'accertamento dei debiti formativi è basato sul punteggio riportato dal candidato in una o più sezioni della prova di selezione per l'accesso ai corsi studi a numero programmato, ovvero della prova di verifica delle conoscenze richieste per l'ingresso ai corsi di studi a numero non programmato. Ciascun corso di studi definisce i criteri con cui saranno assegnati specifici Obblighi Formativi Aggiuntivi (OFA) e lo studente immatricolato ad un corso di studio con un punteggio inferiore a quello prefissato, dovrà soddisfare gli OFA entro il primo anno di corso e prima di sostenere uno qualsiasi degli esami universitari.

Le prove di verifica, ovvero le prove di selezione, per l'ingresso ai corsi di studi ad indirizzo scientifico dell'Ateneo di Catania (Agraria, Chimica, Fisica, Informatica, Ingegneria, Matematica, Scienze Ambientali e Naturali, Scienze Biologiche, Scienze del Farmaco, Scienze Geologiche) prevedono sempre due moduli di Matematica. Il primo comprende 20 quesiti a risposta multipla volti ad accertare le conoscenze degli studenti su argomenti di base, previsti dai programmi ministeriali di ogni scuola superiore secondaria. Il secondo modulo comprende 10 quesiti a risposta multipla volti ad accertare le competenze logico-matematiche dei candidati. Ad oggi, agli studenti che alle prove di ingresso/selezione hanno contratto O.F.A. in Matematica è stato richiesto di svolgere alcune attività supplementari, seguite da momenti di verifica, per controllare se le carenze formative siano state colmate. D'altra parte, l'assolvimento degli O.F.A. non è condizione sufficiente ad assicurare che lo studente frequenti con profitto le lezioni e abbia successo all'esame. Spesso, il mancato superamento dell'esame finale dei corsi di Matematica è da attribuire solo in minima parte alla carenza di conoscenze: allo studente che si appresta a studiare la matematica si richiede, principalmente, abitudine allo studio sistematico e critico, capacità di argomentazione e comunicazione, orale e scritta, che lo studente, invece, spesso sostituisce con la ricerca di procedimenti e schemi risolutivi da usare in maniera meccanica.

Il questionario che proponiamo si compone di due moduli.

Il primo modulo comprende 20 quesiti e mira all'accertamento delle conoscenze di base della disciplina e delle competenze logico-matematiche. Il secondo modulo, non compreso nelle prove di ingresso / selezione, ha la finalità di accertare le capacità di comprensione teorica, ragionamento, argomentazione e comunicazione e fornisce ulteriori indicazioni utili alla progettazione degli interventi da realizzare nelle scuole.

1) Siano x e y due numeri reali tali che $2 < x < 3$ e $6 < y < 8$. Allora

- a) $\frac{1}{3} < \frac{x}{y} < \frac{3}{8}$;
- b) $\frac{1}{4} < \frac{x}{y} < \frac{1}{2}$;
- c) $\frac{1}{2} < \frac{x}{y} < \frac{3}{8}$;
- d) $\frac{1}{4} < \frac{x}{y} < \frac{1}{3}$.

2) Il polinomio $a^4 - b^4 + 2ab(a^2 - b^2)$ si fattorizza in

- a) $(a - b)^3(a + b)$
- b) $(a^3 - b^3)(a - b)$;
- c) $(a + b)^3(a - b)$;
- d) $(a - b)^2(a + b)^2$.

3) Dividendo un numero formato da due cifre per la cifra delle decine si ottiene per quoziente 14 e resto 1. Sapendo che la somma delle cifre è 11 il numero dato è

- a) 92 ;
- b) 15;
- c) 29;
- d) 38.

4) Disporre in ordine decrescente i seguenti numeri reali: $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2}$, $\frac{\pi}{4}$, 30, $(1,002)^3$

- a) 30, $\frac{\pi}{4}$, $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2}$, $(1,002)^3$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$;
- b) 30, $(1,002)^3$, $\frac{\pi}{4}$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2}$;
- c) 30, $\frac{\pi}{4}$, $(1,002)^3$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2}$;
- d) $\frac{\pi}{4}$, 30, $(1,002)^3$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2}$.

5) La disequazione

$$\frac{1 + |x|}{1 + x} > 0$$

è verificata

- a) da tutti i numeri reali x tali che $x > -1$;
- b) da tutti i numeri reali x tali che $-1 < x < 1$;
- c) da tutti i numeri reali x tali che $x > 1$;
- d) da tutti i numeri reali.

6) La disequazione

$$2^{x-|x|} < 1$$

è verificata per

- a) $x = 0$;
- b) $x > 0$;
- c) $x < 0$;
- d) nessun numero reale.

7) La disequazione

$$\frac{1}{\cos^2 x} \geq 1$$

è verificata

- a) per ogni valore di x ;
- b) solo per $x = \pi/4$;
- c) solo per $x = 2k\pi$, k intero;
- d) per ogni $x \neq \pi/2 + k\pi$, k intero.

8) Sia x un numero reale negativo. Il $\log_2(4x^2)$ è uguale a

- a) $2 \log_2(4x)$;
- b) $2 \log_2(2x)$;
- c) $2 + 2 \log_2(-x)$;
- d) $2 + 2 \log_2(x)$.

9) La disequazione

$$\sqrt{x^2 - 5x} \leq 0$$

è verificata per

- a) $0 \leq x \leq 5$;
- b) $x \leq 0, x \geq 5$;
- c) nessun valore di x ;
- d) solo per $x = 0$ e $x = 5$.

10) Uno studente universitario ha superato 4 esami ed ha la media di 24. Qual è il voto minimo che lo studente dovrà prendere all'esame successivo affinché la media diventi almeno 25.

- a) 26 ;
- b) 29 ;
- c) 30 ;
- d) nessuna delle risposte precedenti è corretta. .

11) Le rette di equazioni $3x + 4y = 0$ e $4x - 3y + 1 = 0$ sono

- a) parallele e distinte;
- b) coincidenti ;
- c) perpendicolari ;
- d) passano entrambe per l'origine degli assi .

12) Sia $f(x) = 5^x$. Allora $f(x + 1) - f(x)$ è uguale a

- a) 5;
- b) $5 \cdot 5^x$;
- c) 1;
- d) $4 \cdot 5^x$.

13) Sia R la famiglia di rette di equazione $3y - 6m + mx + 3 = 0$, con m parametro reale. Solo una delle seguenti affermazioni è falsa. Quale?

- a) Tutte le rette di R passano per il punto $(6, -1)$;
- b) esiste una sola retta di R passante per il punto $(1, 1)$;
- c) la retta di R che passa per l'origine si ottiene per $m = 0$;
- d) la retta di R parallela all'asse delle ascisse si ottiene per $m = 0$..

14) Il sistema

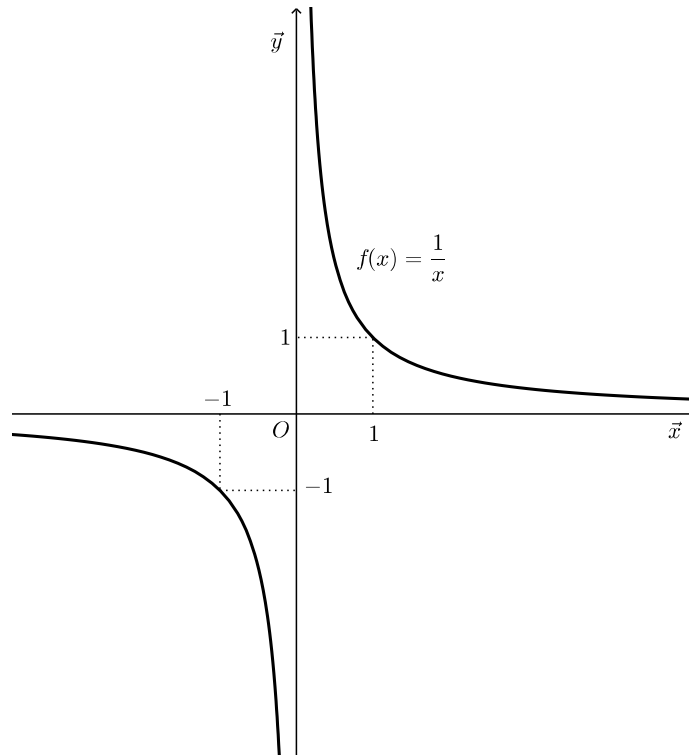
$$\begin{cases} 3x + y = 0 \\ 3\sqrt{2}x + \sqrt{2}y = \sqrt{2} \end{cases}$$

- a) è indeterminato;
- b) non ha soluzioni;
- c) $(0, 0)$ è l'unica soluzione;
- d) $(1, -3)$ è l'unica soluzione.

15) In una scuola elementare, composta da 250 alunni, sono stati attivati due corsi pomeridiani, uno di spagnolo e uno di nuoto. Si sa che 200 alunni frequentano il corso di spagnolo, 199 il corso di nuoto, 21 nessuno dei due corsi. Quanti alunni frequentano entrambi i corsi?

- a) 229 ;
- b) 170 ;
- c) 199;
- d) 30.

16) Sia $f(x)$ la funzione che ha il grafico indicato in figura



Quale delle seguenti affermazioni è falsa?

- a) Comunque si scelga un numero $M > 0$ esiste un numero $\delta > 0$ tale che $f(x) > M$ se $0 < x < \delta$;
- b) Comunque si scelga un numero $M < 0$ esiste un numero $\delta < 0$ tale che $f(x) < M$ se $\delta < x < 0$;
- c) Esiste un numero $M > 0$ tale che $-M \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \neq 0$;
- d) Esistono due numeri $M, \delta > 0$ tali che $f(x) \leq M$ per ogni $x > \delta$.

17) Un rettangolo di lati $8a$ e $4a$ è inscritto in una circonferenza. Quanto vale la lunghezza della circonferenza?

- a) $5\sqrt{2}\pi a$;
- b) $4\sqrt{5}\pi a$;
- c) $8\sqrt{5}\pi a$;
- d) $\sqrt{20}\pi a$.

18) Dato il quadrato $ABCD$ sia P un punto ad esso interno. Se il triangolo APD è equilatero qual è la misura in radianti dell'angolo convesso $B\hat{P}C$?

- a) $2/3\pi$;
- b) $5/6\pi$;
- c) $7/6\pi$;
- d) dipende dalla misura del lato del quadrato.

19) Un'urna contiene 300 palline di tre colori: rosso, verde e giallo. Le palline gialle sono 54, il numero di palline rosse supera di 26 il numero di palline verdi. Quante sono le palline verdi?

- a) 137 ;
- b) 111;
- c) 136;
- d) 110.

20) In una stanza ci sono 77 persone. Di queste, 45 parlano inglese e 60 sono ragazze. Determinare, sulla base di questa sola informazione, quale delle seguenti situazioni è impossibile.

- a) le ragazze che parlano inglese sono esattamente 20 ;
 - b) nessuno dei ragazzi parla inglese ;
 - c) tutti i ragazzi parlano inglese;
 - d) il numero delle ragazze che parlano inglese è maggiore del numero dei ragazzi che parlano inglese
- .

1. COMPRENDERE UNA DEFINIZIONE

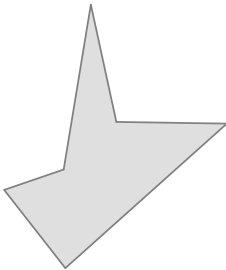
In questa sezione si pone una definizione e si chiede di portare esempi di oggetti che la verificano e esempi di oggetti che non la verificano.

Definizione 1. *Sia X un insieme formato da punti del piano. Si dice che X è convesso se comunque si scelgono due punti distinti di X il segmento che li congiunge è contenuto in X .*

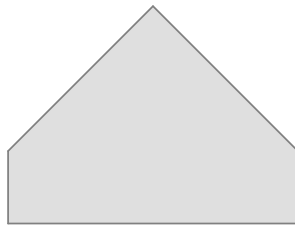
(1) Portare almeno un esempio di insieme convesso.

(2) Stabilire, motivando la risposta, quali tra i seguenti insiemi colorati in grigio sono non convessi.

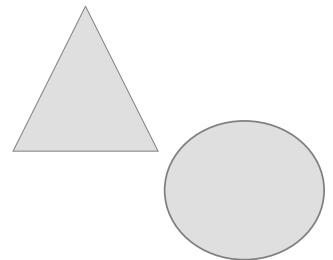
a)



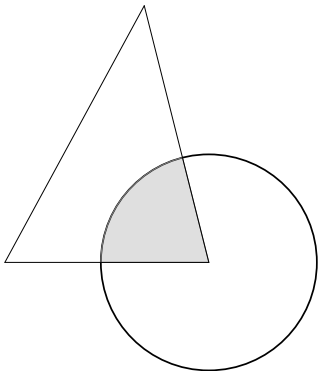
b)



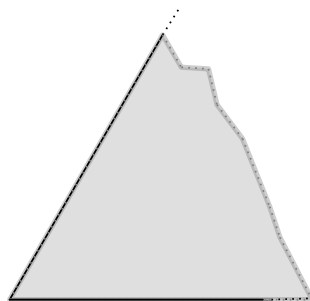
c)



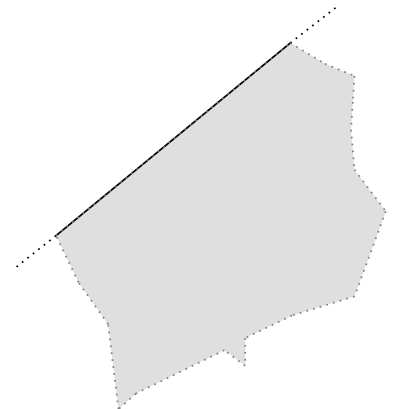
d)



e)



f)



(3) Completare la seguente definizione: Un insieme è *non convesso* se

(4) Stabilire, giustificando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- l'unione di due insiemi convessi è sempre un insieme convesso
- l'intersezione di due insiemi convessi è sempre un insieme convesso
- Il complementare di un insieme convesso è sempre un insieme convesso .

2. DIMOSTRARE UN TEOREMA

Dimostrare i seguenti fatti :

Teorema 1. *La somma degli angoli interni di un triangolo è uguale ad un angolo piatto.*

Teorema 2. *La somma degli angoli interni di un poligono convesso con n lati è uguale ad $(n - 2)$ angoli piatti.*

Stabilire, motivando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- (1) La somma degli angoli interni di un esagono è uguale a 720° .

Motiva la risposta data

- (2) Se la somma degli angoli interni di un poligono convesso è 900° allora il poligono è un ottagono.

Motiva la risposta data

- (3) Esiste un poligono convesso in cui la somma degli angoli interni è 980° .

Motiva la risposta data

- (4) Sia P un poligono convesso.
La condizione

La somma degli angoli interni di P è uguale a 180°
è necessaria affinché

P è un triangolo

Motiva la risposta data

- (5) Sia P un poligono convesso.
La condizione

La somma degli angoli interni di P è uguale a 180°
è sufficiente affinché

P è un triangolo .

Motiva la risposta data

3. CORREGGERE UN RAGIONAMENTO SBAGLIATO

Nella risoluzione dei seguenti esercizi sono stati commessi degli errori. Individuali e proponi la risoluzione corretta.

Problema 1. *Determinare l'insieme delle soluzioni della disequazione*

$$\sqrt{x^2 - 3x} \leq -2$$

Risoluzione.

Elevando al quadrato ambo i membri della disequazione si ottiene:

$$\sqrt{x^2 - 3x} \leq -2 \iff x^2 - 3x \leq 4 \iff x^2 - 3x - 4 \leq 0.$$

Pertanto, l'insieme delle soluzioni è

$$\{x \in \mathbb{R} : x \leq -1 \text{ o } x \geq 4\}.$$

Problema 2. *Determinare l'insieme delle soluzioni della disequazione*

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{x - 1}} > 0$$

Risoluzione.

Poiché $\sqrt{x - 1}$ è sempre maggiore di 0 si ha:

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{x - 1}} > 0 \iff x^2 - 2x - 3 > 0.$$

Pertanto, l'insieme delle soluzioni è

$$\{x \in \mathbb{R} : x < -1 \text{ o } x > 3\}.$$